Université de Strasbourg Session Mai 2013
Télécom Physique Strasbourg le 24 mai 2013

Télécom Physique Strasbourg 1A - Master IRIV M1

Examen : Introduction au traitement du signal

Durée : 1h45
Documents autorisés : formulaire en annexe du cours + feuille format A4 manuscrite (recto-verso).
Nombre de pages : 3
N.B. : ***Veuillez détailler les calculs. La présentation des copies sera prise en compte. Tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte. Certaines questions sont indépendantes.***

Partie 1 : Questions de compréhension du cours

8 points

1. Soit $x(t)$ le signal d'entrée de trois filtres H_1, H_2 et H_3 et $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ les sorties respectives (Figure 1). Préciser pour chacun des filtres s'il s'agit d'un filtre passe-bas idéal ou d'un filtre passe-haut idéal et donner l'intervalle admissible pour leur fréquence de coupure respective. *(1,5 points)*

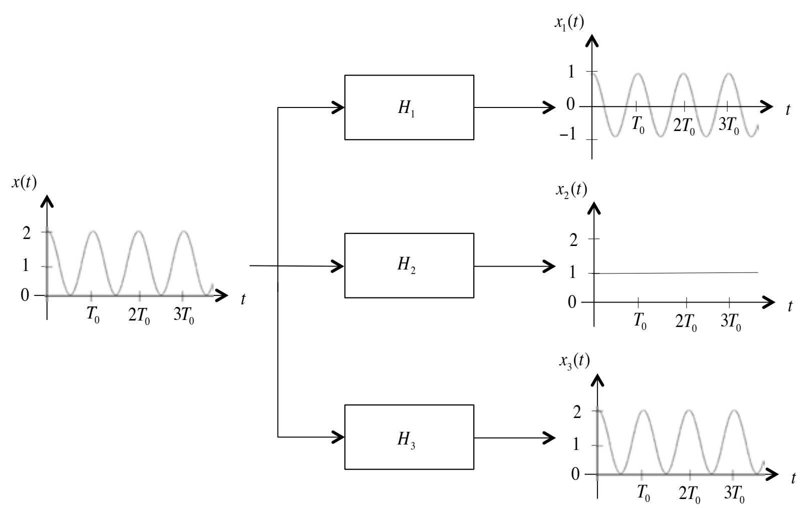

Figure 1: Filtre passe-bas ou passe-haut ?

2. Soit le signal $x(t) = u(t)$ ($u(t)$ étant la fonction d'Heaviside). S'agit-il d'un signal d'énergie finie, de puissance finie, ou de puissance infinie ? Justifier. *(1 point)*

3. Lequel des deux spectres $X(f)$ et $Y(f)$ correspond à un signal temporel périodique (Figure 2)? Justifier. Déterminer l'expression temporelle du signal périodique correspondant. *(1,5 points)*

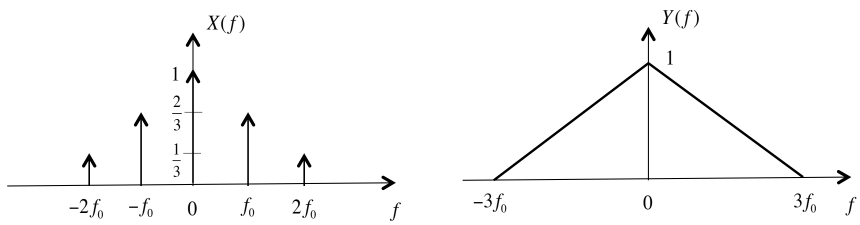

Figure 2: Quel spectre correspond à un signal périodique ?

4. Laquelle des fonctions $R_{xx}(\tau)$ et $R_{yy}(\tau)$ correspond à l'autocorrélation d'un signal d'énergie finie (Figure 3)? Justifier. Quelle est l'énergie du signal correspondant ? *(1 point)*

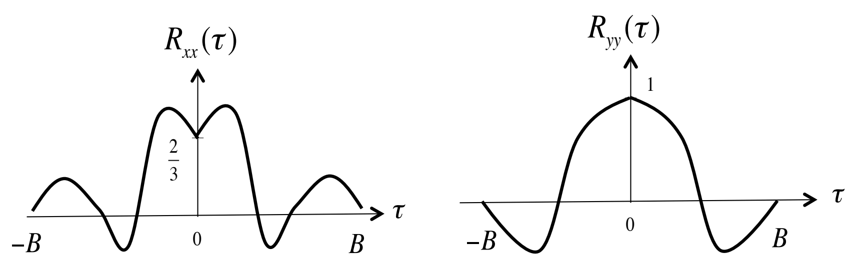

Figure 3: Quelle fonction correspond à l'autocorrélation d'un signal d'énergie finie ?

5. Démontrer que : $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \dfrac{1}{2\epsilon} e^{-\frac{|x|}{\epsilon}} = \delta(x)$. *(1 point)*

6. On souhaite détecter au sein du signal bruité $y(t)$ l'intant d'arrivée du signal $x(t)$ (Figure 4). Proposer une stratégie possible. Pour ce faire, on vous demande de formaliser le problème (*i.e.*, préciser le lien entre $y(t)$ et $x(t)$), de définir les outils mathématiques nécessaires (donner l'expression du filtre le cas échéant), de donner l'expression de la sortie du système et d'indiquer la manière d'en déduire la valeur de l'instant d'arrivée. *(2 points)*

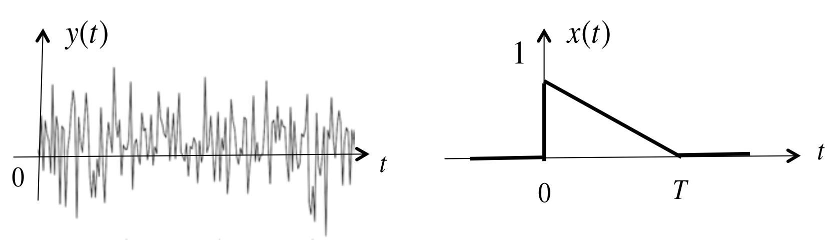

Figure 4: Comment détecter l'instant d'arrivée de $x(t)$ dans $y(t)$?

Partie 2 : Échantillonnage et reconstruction d'un signal analogique

12 points

On s'intéresse à la reconstruction d'un signal analogique $x(t)$ à partir de la suite de ses échantillons $\{x(kT_e),\ k \in \mathbb{Z}\}$ (T_e désigne la période d'échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage). Le signal analogique $x(t)$ a pour expression :

$$x(t) = B\left[\frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t}\right]^2$$

avec $B > 0$.

Le signal analogique reconstruit à partir des échantillons (qui peut différer du signal original $x(t)$), sera noté $\hat{x}(t)$. Par ailleurs le signal analogique :

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

sera appelé "signal échantillonné idéal".

1. Représenter graphiquement $x(t)$ et $x_e(t)$. (*1 point*)
2. Rappeler le résultat du produit de convolution du rectangle par lui-même : $\mathrm{rect}_B(f) * \mathrm{rect}_B(f)$. Représentation graphique du résultat (*2 points*)
3. En déduire que le spectre $X(f)$ du signal $x(t)$ est un triangle de base $2B$ dont on déterminera les autres caractéristiques. (*2 points*)
4. Quelle est la valeur maximale de T_e permettant théoriquement une reconstruction, sans aucune perte d'information, du signal $x(t)$ à partir de ses échantillons ? Exprimer T_e en fonction de B. *On adoptera dans la suite cette valeur pour T_e.* (*1 point*)
5. Déterminer l'expression du spectre $X_e(f)$ du signal échantillonné idéal $x_e(t)$. Représentation graphique de $X_e(f)$. (*2 points*)
6. Expliquer comment on peut reconstruire $x(t)$ à partir de ses échantillons $\{x(kT_e),\ k \in \mathbb{Z}\}$ sans aucune perte d'information ("reconstruction parfaite"). Une telle reconstruction est-elle réalisable ? (*2 points*)
7. Proposer d'autres méthodes de reconstruction. Commenter ces méthodes. (*2 points*)

Université de Strasbourg
Télécom Physique Strasbourg

Session Mai 2014
le 19 mai 2014

Télécom Physique Strasbourg 1A - Master IRIV M1

Examen : Introduction au traitement du signal

Durée : 1h45
Documents autorisés : formulaire en annexe du cours + feuille format A4 manuscrite (recto-verso).
Nombre de pages : 3
N.B. : ***Veuillez détailler les calculs. La présentation des copies sera prise en compte. Tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte. Certaines questions sont indépendantes.***

Les parties 1 et 2 seront rédigées sur des copies séparées

Partie 1 : Modulation en amplitude avec des porteuses en quadrature de phase

10 points

Deux signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$, ayant respectivement une transformée de Fourier $M_1(f)$ et $M_2(f)$ à support fréquentiel borné $[-B, B]$, sont modulés en amplitude avec des porteuses de même fréquence f_p ($f_p > B$) mais en quadrature de phase (Fig. 1) :

$$x_1(t) = m_1(t)\cos(2\pi f_p t) \qquad\qquad x_2(t) = m_2(t)\sin(2\pi f_p t)$$

Un émetteur radio émet la somme

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Le récepteur effectue une démodulation en multipliant le signal reçu par un cosinus à la fréquence f_p :

$$z(t) = y(t)\cos(2\pi f_p t)$$

puis en appliquant un filtre passe-bas supposé idéal de gain 2 et de fréquence de coupure f_p.

1. Donner un exemple de spectre possible pour $m_1(t)$ et $m_2(t)$ (représentation graphique uniquement).

2. Déterminer les transformées de Fourier de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en fonction de $M_1(f)$ et $M_2(f)$.

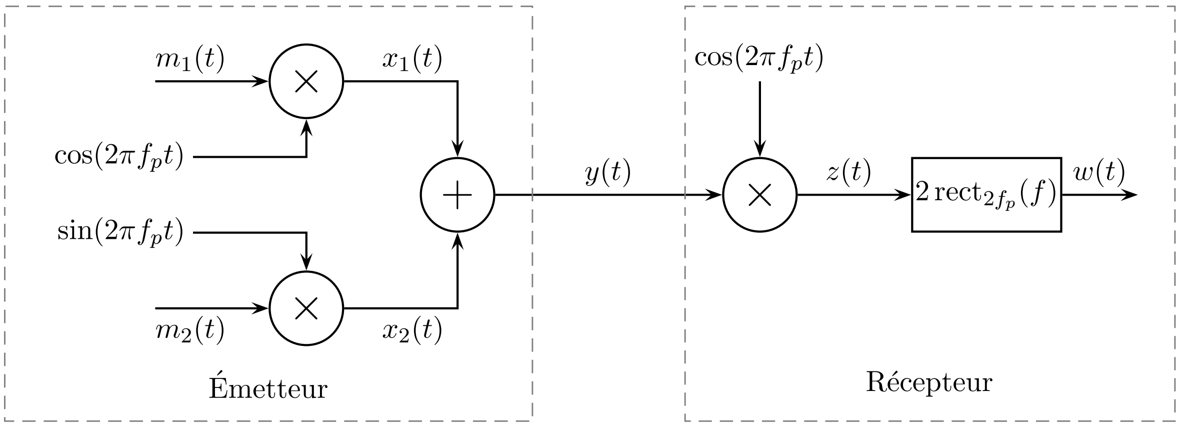

Figure 1: Système de modulation/démodulation

3. En déduire la transformée de Fourier de $y(t)$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de $z(t)$ et représenter la graphiquement.
5. Quel est le signal $w(t)$ en sortie du filtre passe-bas ?
6. Quel est l'intérêt de la condition $f_p > B$?
7. Comment faut-il modifier le récepteur pour obtenir $w(t) = m_2(t)$? Justifier la réponse en développant les calculs.

Les parties 1 et 2 seront rédigées sur des copies séparées

Partie 2 : Réponse d'un filtre moyenneur à une succession de créneaux

10 points

On considère un filtre moyenneur de réponse impulsionnelle :

$$h(t) \;=\; \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}_T(t - \frac{T}{2}) \tag{1}$$

$$\text{avec : } \begin{array}{rcl} \mathrm{rect}_T(t) &=& 0 \quad \text{si} \quad |t| \;>\; T/2 \\ \mathrm{rect}_T(t) &=& 1 \quad \text{si} \quad |t| \;\leq\; T/2 \end{array}$$

On souhaite calculer la réponse $y(t)$ de ce filtre au signal $x(t)$ défini par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} x_0(t - kT_1) && (2) \\ \text{avec : } x_0(t) &= A\,\mathrm{rect}_\Theta(t - \frac{\Theta}{2}) && (3) \end{aligned}$$

On supposera dans toute la suite que : $\Theta \leq T \leq T_1$. Tous les calculs seront menés dans le domaine temporel.

1. Représenter la réponse impulsionnelle $h(t)$. Ce filtre est-il passe-bas, passe-haut, passe-bande ? Ce filtre est-il causal ? Ce filtre est-il stable ? (justifier)
2. Représenter graphiquement les signaux $x_0(t)$ et $x(t)$.
3. Déterminer et représenter graphiquement la réponse $y_0(t)$ du filtre au signal $x_0(t)$ (*on utilisera l'interprétation graphique du produit de convolution*, on rappelle que : $T \geq \Theta$). Vérifier que $y_0(t)$ est un trapèze, que l'on représentera avec précision.
4. En déduire la réponse $y(t)$ du filtre au signal $x(t)$ (*on pourra utiliser la propriété de linéarité et d'invariance dans le temps du filtre*).
5. Représenter graphiquement $y(t)$ (on distinguera trois cas, en fonction des valeurs de T_1 : $T_1 \geq T + \Theta$; $T \leq T_1 \leq T + \Theta$; $T_1 = T$).